Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Pädagogik
Dozent: Dipl.-Päd. Lars Kilian
Seminar „Arbeitstechniken"
SS 2008

HAUSARBEIT

für das Seminar
Arbeitstechniken

Thema:

Jam-or-Fold: Eine spieltheoretische Betrachtung des Heads-Up Poker

Abgabedatum: 28. September 2008

Christopher Tim Althoff
Matrikelnr.: 366840
Fuchsstr. 59, 67688 Rodenbach
Telefon: 06374/994822
E-Mail: timalthoff@web.de
Bachelor Informatik, 2. Semester

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Poker ist in der Spieltheorie und der Informatik, insbesondere im Bereich der Künstlichen Intelligenz, von Interesse, da Poker einige Eigenschaften aufweist, die charakteristisch für viele reale Anwendungen sind. Dazu gehören zum Beispiel der Zwang zum Handeln bzw. zur Entscheidungsfindung bei unsicherer oder unvollständiger Informationslage, sowohl über die jetzige Situation als auch die weitere Entwicklung. Man erhofft sich durch die Analyse von Poker Erkenntnisse über geeignete Strategien für die Entwicklung verschiedenster Algorithmen in der Künstlichen Intelligenz (vgl. [Dud06], S. 374).
Allerdings ist Poker, selbst wenn man es auf zwei Spieler beschränkt, so komplex, dass es mit den aktuell zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten nicht in vollem Umfang gelöst werden kann ([Dud06], Seite 377). Daher beschränkt man sich in der Forschung auf Spiele, die Poker sehr ähnlich sind, aber die Komplexität stark einschränken. So ist es üblich nur zwei Spieler, weniger als fünf Bietrunden (oft nur eine einzige) und nur eingeschränkte Möglichkeiten innerhalb der Bietrunden zuzulassen. Bereits John von Neumann und Oskar Morgenstern analysierten in ihrer wegweisenden Arbeit „Theory of Games and Economic Behavior" (1944, siehe [vNe44]) ein Pokerspiel zwischen zwei Spielern, welches nur aus einer eingeschränkten Bietrunde bestand und bei der die Spieler anstatt der üblichen Handkarten eine Zahl aus dem Intervall [0,1] erhielten (vgl. [Che06], S. 116ff).

In dieser Arbeit wird ein Spiel analysiert, welches Heads-Up No Limit Texas Hold'em Poker, der mit Abstand populärsten Form des Poker, ähnlich ist. Hier spielen zwei Spieler (Heads-Up) eine einzige Bietrunde aus, in der sie sich jeweils nur zwischen den Optionen *Jam* (all-in[1] erhöhen) und *Fold* (aussteigen) entscheiden können. Es zeigt sich, dass dieses vereinfachte Spiel sich unter bestimmten Voraussetzungen sehr gut eignet bestimmte Eigenschaften des Pokerspiels zu analysieren. Ziel ist es Erkenntnisse zu gewinnen, die für das eigentliche Pokerspiel relevant sind und von denen man sich einen strategischen Vorteil versprechen darf. Es wird gezeigt, wie man spieltheoretische Erkenntnisse, mit besonderem Augenmerk auf dem sogenannten *Nash-Equilibrium*, im Poker anwenden kann. Dabei wird eine (nahezu) optimale Strategie aufgezeigt, die es dem Gegner (so überlegen er auch sein mag) unmöglich macht einen Vorteil zu erlangen.

Strukturiert ist die Arbeit wie folgt: Im zweiten Kapitel werden die spieltheoretischen Grundlagen behandelt, die für das Verständnis der nachfolgenden Analyse notwendig sind. Dazu wird erläutert was Spieltheorie eigentlich ist, welchen Zweck

[1] Das Setzen all seiner am Pokertisch verfügbaren Chips beziehungsweise all seines Geldes, das man im Spiel zur Verfügung hat.

Spiele erfüllen und mit welchen Ansätzen man Spiele zu lösen versucht. Im dritten Kapitel wird ein vereinfachtes Pokerspiel vorgestellt, erklärt und analysiert. Dabei wird in besonderem Maße auf die optimalen Strategien der beiden Spieler eingegangen. Im vierten Kapitel werden das vereinfachte und das reale Pokerspiel gegenüber gestellt und bewertet, inwiefern die Ergebnisse von Nutzen sein können. Dabei wird auch die Frage geklärt wie man die Erkenntnisse konkret im realen Pokerspiel anwenden kann.

Die Arbeit richtet sich insbesondere an spieltheoretisch Interessierte, die erfahren möchten, wie wissenschaftliche Erkenntnisse in einem „alltäglichen" Spiel wie Poker von Vorteil sein können. Zudem richtet sie sich an Pokerspieler, welche an einer optimalen Strategie für Heads-Up No Limit Hold'em Poker und deren theoretischem Hintergrund interessiert sind. In dieser Arbeit wird dabei die Kenntnis grundlegende Regeln des Pokerspiels vorausgesetzt (siehe [Ano08], Ablauf eines Pokerspiels). Allerdings ist ein tieferes Verständnis von Poker zum Nachvollziehen der hier vorgestellten Konzepte nicht notwendig. Darüber hinaus wurde das formale Niveau der Arbeit bewusst niedrig gehalten, da diese Art der Betrachtung nicht Gegenstand der Arbeit ist.

2 Spieltheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden diejenigen grundlegenden Begriffe der Spieltheorie erläutert, die zum Verständnis der nachfolgenden Analyse notwendig sind. Mit Hilfe des allgemein bekannten Spiels „Schere-Stein-Papier" stellen wir Lösungsansätze vor, mit denen Spiele in irgendeiner Hinsicht optimal gelöst werden können.

2.1 Spieltheorie - Was ist das?

Die Spieltheorie ist seit 1944, dem Erscheinungsjahr des Grundlagenwerkes von von Neumann und Morgenstern ([vNe44]), eine eigenständige mathematisch-wissenschaftliche Disziplin. Auch wenn sich das Buch Spielen wie Schach, Bridge oder Poker widmet, liegt der Fokus der Spieltheorie doch mehr auf ökonomischen Prozessen als auf Gesellschaftsspielen (vgl. [Bew07], S. IX). Neben den Modellen für wirtschaftliche Probleme beschäftigt sie sich außerdem mit politischen, sozialen, biologischen und zoologischen Modellen (vgl. [Sch04], S. 1-5). Laut Holler und Illing wird die Spieltheorie von vielen Ökonomen als die formale Sprache der ökonomischen Theorie betrachtet. Die beiden Autoren sehen den Gegenstand der Spieltheorie in der Analyse von strategischen Entscheidungssituationen, d.h. von Situationen, in denen das Ergebnis auf komplexe Art und Weise von den Entscheidungen mehrerer Entscheidungsträger abhängt. Diese Situationen kann man als Spielsituationen beschreiben, bei denen jeder Spieler nach bestimmten Regeln strategische Entscheidungen trifft (vgl. [Hol05], S. 1).

2.2 Einführung wichtiger Begriffe anhand von „Schere-Stein-Papier"

Chen und Ankenman „definieren" ein *Spiel* (in Normal- bzw. Matrixform) wie folgt (vgl. [Che06], S. 101)[2].

1. Es gibt mindestens zwei *Spieler*.
2. Mindestens ein Spieler kann zwischen verschiedenen *Aktionen* wählen.
3. Das Spiel definiert eine Menge von *Auszahlungen* für jeden Spieler.
4. Die Auszahlung hängt von der Wahl der Aktionen der einzelnen Spieler ab.

Unter der *Strategie* eines Spielers stellen wir uns eine vollständige Handlungsanweisung vor, die für jede Situation, in welcher der betreffende Spieler ziehen muss, einen Zug vorsieht. Auf Grund dieser Vollständigkeitsanforderung können Strategien mitunter sehr komplex werden (vgl. [Bew07], S. 98). Man sagt eine Strategie ist *dominiert*, wenn es eine andere Strategie gibt, die gemessen an allen möglichen Strategien des Gegners, nie schlechter aber mindestens einmal besser ist. Unter diesen Umständen wäre es vollkommen irrational die dominierte Strategie zu wählen oder überhaupt zu beachten (vgl. [Che06], S. 106). Gibt es nur zwei Spieler mit überschaubar vielen Strategien, lässt sich das Spiel sehr gut als Matrix oder Tabelle darstellen. Die Einträge sind entweder Tupel, bestehend aus der Auszahlung für den ersten und für den zweiten Spieler, oder atomare Werte, welche die Auszahlung aus Sicht eines bestimmten Spielers darstellen. Man spricht auch von einer *Auszahlungstabelle* (vgl. [Che06], S. 102).

Betrachten wir das Spiel „Schere-Stein-Papier", bei dem die Schere das Papier, das Papier den Stein und der Stein die Schere schlägt. Treffen zwei gleiche Symbole aufeinander gibt es ein Unentschieden. Das Spiel eignet sich hervorragend zur Einführung der Begriffe, da es spieltheoretisch gesehen einige Gemeinsamkeiten mit Poker besitzt. Formal ergibt sich folgende Auszahlungstabelle:

	Spieler 2		
Spieler 1	Schere	Stein	Papier
Schere	0	-1	1
Stein	1	0	-1
Papier	-1	1	0

Tabelle 1: Auszahlungstabelle von „Schere-Stein-Papier" von Spieler 1

[2]Dabei sei angemerkt, dass es sich hierbei um eine informelle Begriffsbeschreibung handelt. Eine formale Definition findet man z.B. in Schlees Einführung in die Spieltheorie (vgl. [Sch04], S. 7)

Die Einträge in Tabelle 1 entsprechen der Auszahlung von Spieler 1. Alles was Spieler 1 gewinnt verliert Spieler 2 und umgekehrt. Daher spricht man in diesem Zusammenhang auch von *(2-Personen-)Nullsummenspielen*.
Beide Spieler können jeweils zwischen drei Strategien, nämlich Schere, Stein oder Papier wählen. Außerdem ist es möglich eine *gemischte Strategie* anzugeben, bei der die eben vorgestellten *reinen Strategien* mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden ([Che06], S. 101ff). Beispielsweise wäre (50% Schere, 25% Stein, 25% Papier) eine gemischte Strategie, wohingegen (0% Schere, 100% Stein, 0% Papier) eine reine Strategie ist.
Weiter ist es sinnvoll den *Informationsstand* der Spieler zu charakterisieren. Bei „Schere-Stein-Papier" geht der ganze Reiz des Spiels von der Ungewissheit über den nächsten Zug des Gegners aus (es gibt z.B. keine zufälligen Einflüsse). Man spricht dabei von *imperfekter Information*. Das Gegenteil dazu bildet die *perfekte Information*, bei der allen Spielern alle Informationen offenliegen (vgl. [Bew07], S. 98 und 241). Bezüglich Spielen mit imperfekter Information ist Poker geradezu ein Paradebeispiel, weil die Handkarten verdeckt und für jeweils nur einen einzigen Spieler sichtbar verteilt werden, ihnen im Spiel aber eine sehr hohe Bedeutung zukommt.

2.3 Allgemeine Lösungsansätze von Spielen

Ein wesentliches Kennzeichen von Spielsituationen ist die *strategische Unsicherheit* über das Verhalten der Mitspieler. Je nach Erwartung über die Strategiewahl der Mitspieler kann es zu verschiedenen Lösungen kommen. Es existieren mehrere Lösungskonzepte, welche sich in der Modellierung dieser Erwartungsbildung unterscheiden (vgl. [Hol05], S. 54).
In diesem Zusammenhang kommt *Gleichgewichten* eine große Bedeutung zu. Ein strategisches Gleichgewicht ist dadurch charakterisiert, dass es für keinen Spieler empfehlenswert ist, von der gewählten Strategie abzuweichen, das heißt es ist dem Spieler im Gleichgewicht nicht möglich seinen Nutzen zu erhöhen, in dem er von seiner Strategie abweicht (vgl. [Bew07], S. 114 und [Che06], S. 103).
Im Folgenden werden wir zwei Lösungskonzepte, das *Gleichgewicht in dominanten Strategien* und die *Maximinlösung* ansprechen, bevor wir uns dem *Nash-Gleichgewicht* zuwenden, welchem in dieser Arbeit besondere Bedeutung zukommt.

2.3.1 Gleichgewicht in dominanten Strategien

Eine Strategie heißt *dominant*, wenn sie dem Spieler unter allen möglichen Strategien den größten Nutzen ermöglicht, unabhängig davon, welche Strategien die anderen Spieler wählen. Verfügt ein Spieler über eine solche Strategie, gibt es keine strategische Unsicherheit, da er seine optimale Strategie unabhängig von den Erwartungen

an seine Gegner bestimmen kann.
Es gibt in der Regel keine dominante Strategie, da im Allgemeinen die optimale Strategie eines Spielers davon abhängt, welche Strategien die anderen Spieler wählen. Daher ist dieses Konzept meist nur wenig hilfreich (vgl. [Hol05], S. 54f).

2.3.2 Maximinlösung

Nehmen wir an ein Spieler hat die pessimistische Erwartung, seine Gegner würden versuchen ihm den größtmöglichen Schaden zuzufügen. Dieser Spieler wird eine Strategie wählen, die ihm auch im ungünstigsten Fall noch einen möglichst großen Nutzen sichern kann. Das Maximinkriterium macht insbesondere in 2-Personen-Nullsummenspielen Sinn, da hier der Gewinn des einen Spielers der Verlust des anderen Spielers ist. Man spricht hier auch von *strikt kompetitiven Spielen*.
Auch die Maximinlösung ist als Lösungskonzept umstritten, da es oft unplausibel ist anzunehmen, der Gegner würde einem um jeden Preis (z.B. niedrigere Gewinnerwartung oder gar Verlust) schaden wollen. Meist würde strategisches Denken zu einer anderen Lösung führen als der Maximinlösung. Zudem ist sie oft nicht eindeutig (vgl. [Hol05], S. 55f).

2.3.3 Nash-Gleichgewicht

Das Nash-Gleichgewicht oder Nash-Equilibrium geht auf die Doktorarbeit des amerikanischen Mathematikers John Forbes Nash Jr. zurück („Non-cooperative Games" 1949, [Nas51]), der dafür 1994 zusammen mit Reinhard Selten und John Harsanyi den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt und damit die Basis der so genannten nicht-kooperativen Spieltheorie bildete. In der nicht-kooperativen Spieltheorie sind keine Spielabläufe erlaubt, die über die Regeln hinausgehen, wie z.B. das Bilden von Koalitionen (vgl. [Bew07], S. 314).
Wir definieren das Nash-Gleichgewicht (informell) nach Holler und Illing (siehe [Hol05], S. 57): „Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination [..], bei der jeder Spieler eine optimale Strategie [..] wählt, gegeben die optimalen Strategien aller anderen Spieler. [...] Ausgehend von einem Nash-Gleichgewicht, besteht für keinen Spieler ein Anreiz, von seiner Gleichgewichtsstrategie abzuweichen."
Man überlegt sich dabei folgendes: Jeder Spieler beschreibt seine Erwartung an die Strategien aller anderen Spieler. Dann wählt er selbst eine Strategie aus, die gemessen an den anderen Strategien den höchsten Nutzen verspricht. Diese Strategie ist seine *beste Antwort*. In einem Nash-Gleichgewicht müssen die Erwartungen der Spieler über die Strategiewahl der Mitspieler übereinstimmen. Das ist nur dann der Fall, „wenn die den Mitspielern unterstellten Strategien [..] ihrerseits wiederum beste Antworten auf die Strategien der anderen Spieler sind [...]. Es liegen dann *wechselseitig beste Antworten* vor. Das ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass jeder

Spieler seine optimale Strategie spielt, gegeben die optimalen Strategien der anderen Spieler" (siehe [Hol05], S. 58).

Betrachten wir nun wieder unser Beispiel „Schere-Stein-Papier". Dazu stellen wir uns einen Gegenspieler vor, der zu jedem Zeitpunkt über unsere Strategie vollständig Bescheid weiß und immer die optimale Gegenstrategie wählt. Das bedeutet: Wählen wir Stein, wird er immer Papier spielen usw. Die Strategie (Stein, Papier) ist hier kein Nash-Gleichgewicht, da unsere Wahl der Strategie Stein nicht optimal ist, falls der Gegner Papier wählt. Würden wir deswegen auf Schere umsteigen, bedeutet das für unseren Gegner, dass er nur noch Stein spielen wird. Es ist leicht ersichtlich, dass sich so nie ein Gleichgewicht einstellen wird. Wir halten also fest, dass es möglich ist, dass gar kein Nash-Gleichwicht existiert. Diese Aussage muss hier jedoch eingeschränkt werden, da wir bisher nur reine Strategien betrachtet haben. Lassen wir auch gemischte Strategien zu, existiert immer mindestens ein Nash-Gleichwicht (vgl. [Sch04], S. 35). In 2-Personen-Nullsummenspielen bedeutet die Existenz solcher Zyklen oder *oszillierender Strategien* direkt, dass die optimalen Strategien aus einer Mischung der auftretenden reinen Strategien bestehen (vgl. [Che06], S. 109f).
Untersuchen wir dazu die folgende Strategie (1/3 Schere, 1/3 Stein, 1/3 Papier). Egal welche Strategie unser perfekter Gegenspieler nun auswählt, er kann nie einen Vorteil erlangen, seine Gewinnerwartung liegt immer bei 0. Wählt er beispielsweise die reine Strategie (Stein) aus, so wäre unsere Strategie nicht mehr optimal. Deswegen sollte auch unser Gegenspieler die gleiche gemischte Strategie verwenden, um sich selbst vor der Möglichkeit eines Verlustes zu schützen. Dann kommt es zum Nash-Gleichgewicht von „Schere-Stein-Papier", da nun kein Spieler einen Anreiz hätte von seiner Strategie abzuweichen.
Weiter verdeutlicht dies auch gut den defensiven Ansatz des Nash-Gleichgewichtes. Es macht uns *unausbeutbar* (engl. unexploitable), dafür verzichten wir aber auf die Möglichkeit einen Vorteil gegenüber unserem Gegenspieler zu erlangen (vgl. [Che06], S. 105).
Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist das *Indifferenzergebnis*. Wir haben festgestellt, dass es für den Mitspieler keinen Unterschied macht, welche Strategie er wählt, falls wir die oben genannte gemischte Strategie wählen. Man sagt auch der Mitspieler ist indifferent zwischen seinen Strategien, da alle Strategien, sogar alle Mischungen zwischen ihnen gleich gut sind. Ist das der Fall haben wir eine optimale Strategie gefunden (vgl. [Fer05], S. 17-19). Macht es nämlich keinen Unterschied welche Strategie der Gegenspieler wählt, kann er auch keinen Vorteil davon haben, seine Strategie zu verändern (vgl. [Che06], S. 105). Diese Eigenschaft wird oft dazu genutzt das Gleichgewicht in gemischten Strategien zu finden und darstellen zu können (vgl. [Hol05], S. 68).

Holler und Illing liefern zwei wesentliche Begründungen, „warum Spieler Nash-Gleichgewichts-Strategien wählen sollten:

1. Jeder Spieler verhält sich im Nash-Gleichgewicht rational und
2. Nash-Gleichgewichte sind die Endpunkte dynamischer Anpassungsprozesse, in deren Verlauf die Spieler aus enttäuschten Erwartungen lernen. (vgl. [Hol05], S. 61)"

Allerdings gibt es auch Kritikpunkte. Das Nash-Gleichgewicht existiert nicht immer und ist oft nicht eindeutig. Weiter ist es möglich, dass z.B. Maximinlösungen einen höheren oder gleich hohen Nutzen versprechen. Außerdem setzt das Nash-Gleichgewicht voraus, dass die Auszahlungen aller Spieler *gemeinsames Wissen* ist. Dies ist in realen Anwendungen in der Ökonomie oft nicht der Fall. Im Gegensatz dazu ist die Maximinlösung unabhängig von den Auszahlungen der anderen Spieler, sie hängt einzig und allein von der eigenen Auszahlung ab und ist somit robust (vgl. [Hol05], S. 61-72).

3 Analyse eines vereinfachten Pokerspiels

Dieses Kapitel enthält die Analyse eines vereinfachten Pokerspiels, welches schon Chen und Ankenman verwendeten (vgl. [Che06]). Das Lösen dieser vereinfachten Spiele ist nützlich, da die meisten Spiele Erkenntnisse ermöglichen, die in realem Poker angewendet werden können. Dabei ist es nicht unerheblich, dass echtes Pokerspiel zu komplex ist um es vollständig zu lösen, auch unter Zuhilfenahme der Rechenleistung heutiger Computer (vgl. [Che06], Seite 123).
Zunächst wird auf die Regeln des Spiels eingegangen und insbesondere die Verwendung der [0,1]-Distribution erläutert, wie sie schon von Neumann und Morgenstern zur Analyse eines simplen Pokerspiels verwendeten (vgl. [vNe44]). Weiter wird erläutert wie man solche Spiele lösen kann und warum sich dadurch gerade die optimalen Strategien ergeben. Danach folgt die eigentliche Lösung des Spiels, indem wir für beide Spieler die optimalen Strategien herleiten. Dabei orientieren wir uns an der Vorgehensweise von Chen und Ankenman (vgl. [Che06], S. 111-139).

3.1 Die [0,1]-Distribution

In [0,1]-Spielen erhalten die Spieler anstatt der üblichen Karten je eine zufällige reelle Zahl aus dem Intervall [0,1]. Dabei haben beide Spieler die gleiche Chance eine beliebige Zahl zu erhalten. Diese Zahl ersetzt die Pokerhand. Kommt es zu einem Showdown gewinnt die kleinere Zahl, das bedeutet 0 ist die stärkste und 1 die schwächste Zahl.

Die Strategien in solchen Spielen unterscheiden sich auf Grund ihrer *Struktur* von den bisher betrachteten Strategien. Sie bestehen aus puren Strategien für Teilintervalle, welche durch einen *Grenzwert* (engl. threshold) abgegrenzt sind. Die Grenzwerte sind Zahlen aus dem Intervall [0,1], welche die Grenze zwischen zwei unterschiedlichen Aktionen (wie z.B. aussteigen *(Fold)*, mitgehen *(Call)* oder erhöhen *(Raise)*) markieren (vgl. [Che06], S. 114).

Chen und Ankenman (vgl. [Che06], S. 114) gehen bei der Lösung von [0,1]-Spielen wie folgt vor:

1. Die Struktur der Lösung raten.
2. Das Spiel lösen unter der Voraussetzung, dass die geratene Struktur korrekt war.
3. Nachweisen, dass die geratene Struktur korrekt war, indem gezeigt wird, dass kein Spieler seine Gewinnerwartung erhöhen kann, wenn er einseitig von der Strategie abweichen würde.

Ein Beispiel für eine solche Struktur könnte z.B. sein, dass ein Spieler mit Händen zwischen 0 und x mitgeht und mit Händen zwischen x und 1 aussteigt. Dabei wäre x dann der Grenzwert. Ziel ist es nun diesen Grenzwert zu finden. Dabei hilft uns, dass man bei optimalen Strategien in diesem Grenzwert *indifferent* ist, welche der beiden Aktionen man wählt. Einen informellen Beweis liefern Chen und Ankenman (vgl. [Che06], S. 115). Auf Basis dieser Erkenntnis können wir nun Gleichungen aufstellen, die wir *Indifferenzgleichungen* nennen werden. Lösen wir diese Gleichungen, erhalten wir die konkreten Grenzwerte unserer optimalen Strategie.

3.2 Das [0,1]-Jam-or-Fold Spiel

Die Regeln seien wie folgt definiert (vgl. [Che06], S. 127ff):
Beide Spieler haben gleiche *Stacks* (Geld oder Chips, die ein Spieler am Tisch hat) von S Einheiten. Jeder Spieler erhält eine Nummer aus dem Intervall [0,1]. Der erste Spieler (im Folgenden der Verteidiger oder X) zahlt einen (Big) *Blind* (Zwangseinsatz) von 1 Einheit. Der andere Spieler (im Folgenden der Angreifer oder Y) zahlt einen (Small) Blind von 0,5 Einheiten und handelt zuerst. Der Angreifer kann nun entweder auf S Einheiten erhöhen (all-in Raise oder auch *jam*) oder aussteigen (*fold*) und damit den Small Blind aufgeben. Wenn der Angreifer all-in geht kann der Verteidiger entweder mitgehen (*call*) oder selbst aussteigen (*fold*). Kommt es zu einem *Showdown* (Aufdecken der Spielerkarten, um einen Gewinner zu ermitteln) legen wir die *Equity* (durchschnittlicher Anteil eines Spielers am aktuellen Pot, gemessen an seinen Gewinnchancen) der Hand mit der kleineren Zahl auf 2/3 des *Pots* (der zu gewinnende Preispool) fest. Die schlechtere Hand gewinnt einen Showdown also zu

ca. 33%.

Chen und Ankenman haben ein ähnliches Spiel analysiert, mit dem einzigen Unterschied, dass die Hand mit der kleineren Nummer den Pot immer gewann (vgl. [Che06], S. 123-126). Dies hat sich als unrealistische Annahme herausgestellt. Beispielsweise hat eine gute Hand wie A♣K♣ nur eine Equity von ca. 66,6% gegen eine schlechte Hand wie 8♠5♢, ist also weit davon entfernt immer zu gewinnen. Dieser Tatsache wird in dem hier vorgestellten Spiel Rechnung getragen und kann so gesehen als eine Erweiterung betrachtet werden.
Des Weiteren ist dieses Spiel von besonderer Bedeutung, da die wesentliche Einschränkung in Jam oder Fold in bestimmten Situationen im Poker kaum eine Vereinfachung ist. In No Limit Hold'em Turnieren sind in den späten Phasen die Blinds so hoch, dass man strategisch gesehen kaum andere Möglichkeiten hat als all-in zu gehen oder auszusteigen. Chen und Ankenman zeigen, dass man durch diese Einschränkung (bei Stacks von max. 10-11 Big Blinds) kaum von der optimalen Strategie abweicht (vgl. [Che06], S. 123, 137-139). Insbesondere in Sit'n'Gos, einer Pokerturnierart mit meist nur 9-10 Spielern, welche sich einer immer größeren Beliebtheit erfreuen, sind diese Phasen äußerst dominant. Daher sind die hier gewonnenen Erkenntnisse von hoher praktischer Bedeutung (vgl. [Mos07], S. 130ff).
Wir können bereits jetzt eine Aussage bzgl. der Struktur der Lösung treffen. Die Spieler haben hier nur zwei Alternativen, zum Einen weiteres Geld in den Pot zu investieren, indem sie erhöhen bzw. mitgehen oder zum Anderen direkt auszusteigen. Das Erhöhen oder Mitgehen wird immer dann vom Aussteigen dominiert, wenn die konkrete Hand schlechter ist als eine Hand, mit der man aussteigen würde. Daher besteht die Strategie nur aus 2 Regionen - guten Händen mit denen weiteres Geld in den Pot investiert wird und schlechte Hände mit denen ausgestiegen wird (vgl. [Che06], S. 123). Zur Analyse müssen wir für das Spiel die nachfolgende Fallunterscheidung treffen:

3.2.1 Fall 1: Stacksize < 3

Sind die Stacks kleiner als 3 Einheiten ist die Strategie des Verteidigers recht einfach. Sollte der Angreifer All-in gehen beträgt der Pot maximal 4 Einheiten (3 vom All-in + 1 vom Big Blind) und der Verteidiger müsste nur maximal 2 Einheiten mitgehen. Er erhält also *Odds*[3] von mindestens zwei zu eins. Da der Verteidiger selbst mit der schlechtesten Hand 1/3 Equity, d.h. im Schnitt 1/3 des Pots, hat, sollte er immer mitgehen. Der Grenzwert ergibt sich also zu $x = 1$. Er hat keine andere Option, da die Strategie Fold hier immer von Call *dominiert* wird. In diesem Fall sollte der

[3]Die Odds geben das Verhältnis von möglichem Gewinn zum zu zahlenden Einsatz wieder, sind also ein Ausdruck für das Kosten/Nutzen-Verhältnis eines zu bringenden Einsatzes.

Angreifer einfach seine Gewinnerwartung gegen den Verteidiger maximieren.
Der Verteidiger wird mit allen Händen mitgehen. Wenn der Angreifer mit der Grenzwert-Hand y All-in geht, hat der Verteidiger mit der Wahrscheinlichkeit $p = y$ eine bessere und mit $p = 1 - y$ eine schlechtere Hand. Wir stellen nun die Indifferenzgleichungen auf, um den Grenzwert zu bestimmen. Im Grenzwert müssen die Erwartungswerte (EV) für Jam und Fold identisch sein.

$$\begin{aligned}
\text{EV}(Y, jam) &= p(\text{Angreifer gewinnt}) \cdot (\text{Pot}) \cdot (\text{Gewinner-Equity}) \\
&\quad + p(\text{Angreifer verliert}) \cdot (\text{Pot}) \cdot (\text{Verlierer-Equity}) - (\text{All-In Kosten}) \\
\text{EV}(Y, jam) &= (1 - y) \cdot (2S) \cdot (\frac{2}{3}) + \ (y) \cdot (2S) \cdot (\frac{1}{3}) - (S) \\
\text{EV}(Y, jam) &= \frac{4S}{3} - \frac{4Sy}{3} + \frac{2Sy}{3} - S = \frac{S}{3} - \frac{2Sy}{3} \\
\text{EV}(Y, fold) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{EV}(Y, jam) &= \text{EV}(Y, fold) \\
\frac{S}{3} - \frac{2Sy}{3} &= -\frac{1}{2} \\
2S - 4Sy &= -3 \\
y &= \frac{2S + 3}{4S}
\end{aligned}$$

Der Grenzwert für den Angreifer ist also $y = \frac{2S+3}{4S}$. Betrachten wir $S = 1.5$ erhalten wir $y = 1$. Hier sollte also auch der Angreifer jede Hand All-In gehen. Das ist genau der Punkt an dem auch der Angreifer Odds von zwei zu eins bekommt.

3.2.2 Fall 2: Stacksize > 3

Sind die Stacks größer als 3 Einheiten, bekommt der Verteidiger nicht mehr Odds von zwei zu eins, er kann also nicht mehr alle Hände profitabel mitgehen bzw. callen. Genauer gesagt kann er keine Hände callen, die schlechter sind als der Jam-Grenzwert des Angreifers, weil er sonst mit der definitiv schlechteren Hand einen zu großen Pot spielen müsste (d.h. $x < y$). Der EV von Call ist dann nicht mehr größer als der EV von Fold (aussteigen). Wir lösen diesen Fall wieder, indem wir die Grenzwerte so wählen, dass der jeweilige Gegner indifferent zwischen seinen Aktionen ist. Kommt es zu einem Showdown gewinnt die bessere Hand im Durchschnitt $S/3$[4] , wohingegen die schlechtere Hand im Durchschnitt $S/3$ verliert.
Zunächst berechnen wir den Grenzwert des Verteidigers x, indem wir den Angreifer zwischen Jam und Fold indifferent machen. Man beachte hier, dass wir den EV des Grenzwertes y berechnen. Der Verteidiger callt mit der Wahrscheinlichkeit x und

[4]Der Pot beträgt $2S$ und wird zu $\frac{2}{3}$ Wahrscheinlichkeit gewonnen. Also: $\frac{2}{3} \cdot 2S - S = \frac{S}{3}$

foldet mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - x$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{EV}(Y, jam) &= p(\text{Verteidiger callt}) \cdot (-\frac{S}{3}) + p(\text{Verteidiger foldet}) \cdot (+1) \\
\mathrm{EV}(Y, jam) &= (x) \cdot (-\frac{S}{3}) + (1 - x) \cdot (+1) = -\frac{xS}{3} + 1 - x \\
\mathrm{EV}(Y, fold) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{EV}(Y, jam) &= \mathrm{EV}(Y, fold) \\
xS + 3x &= \frac{9}{2} \\
x &= \frac{9}{2(S+3)}
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Angreifer. Dieser geht mit Händen bis zum Grenzwert y All-in. Davon sind $\frac{x}{y}$ besser als der Call-Grenzwert x des Verteidigers und $\frac{y-x}{y}$ sind schlechter (Man beachte $x < y$). Wie bisher werden die beiden Erwartungswerte von Call und Fold gleichgesetzt, um X indifferent zwischen den beiden Strategien zu machen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{EV}(X, call) &= p(\text{Verteidiger verliert}) \cdot (-\frac{S}{3}) + p(\text{Verteidiger gewinnt}) \cdot (\frac{S}{3}) \\
\mathrm{EV}(X, call) &= (\frac{x}{y}) \cdot (-\frac{S}{3}) + (\frac{y-x}{y}) \cdot (\frac{S}{3}) = \frac{S}{3} \cdot \frac{y-2x}{y} \\
\mathrm{EV}(X, fold) &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{EV}(X, call) &= \mathrm{EV}(X, fold) \\
\frac{S}{3} \cdot \frac{y-2x}{y} &= -1 \\
S \cdot (y - 2x) &= -3y \\
Sy \cdot 3y &= 2Sx \\
y &= \frac{2Sx}{S+3} = \frac{2S(\frac{9}{2(S+3)})}{S+3} = \frac{9S}{(S+3)^2}
\end{aligned}$$

Die optimalen Strategien lauten also wie folgt: Der Angreifer sollte mit $\frac{9S}{(S+3)^2}$ seiner Hände All-in gehen und der Verteidiger sollte mit $\frac{9}{2\cdot(S+3)}$ seiner Hände callen. Für eine Stacksize von $S = 10$ bedeutet das, dass der Angreifer mit $\frac{9\cdot 10}{(10+3)^2} = \frac{90}{169} \approx 53,3\%$ seiner Hände die Blinds angreift, während der Verteidiger diese mit den besten $\frac{9}{2\cdot(10+3)} = \frac{9}{26} \approx 34,6\%$ der Hände verteidigen sollte. Dies wirkt auf den ersten Blick sehr *loose* (bedeutet das Spielen vieler Hände), weil man seinen ganzen Stack von 10 Blinds riskiert, nur um die 1,5 Einheiten an Blinds zu gewinnen. Diese Betrachtungsweise ist allerdings nicht ganz korrekt, da man im Falle eines Verlustes nicht den ganzen Stack S sondern nur $S/3$ verliert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *effektiven Stackgröße* $S/3$ (vgl. [Che06], Seite 129).

Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 noch einmal (aus der Sicht des Angreifers Y) übersichtlich dargestellt:

<table>
<tr><th>X →</th><th>[0,x]</th><th>[x,y]</th><th>[y,1]</th></tr>
<tr><th>Y</th><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>[y,1]</td><td colspan="3">$-0,5$ Verlust SB</td></tr>
<tr><td>[x,y]</td><td>$-S/3$ All-in Verlust</td><td colspan="2" rowspan="2">$+1$
Gewinn BB</td></tr>
<tr><td>[0,x]</td><td>0</td></tr>
</table>

Tabelle 2: Auszahlungstabelle des [0,1]-Jam-or-Fold Spiels

Gewichten wir den Gewinn bzw. Verlust von Y mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, so können wir den *Wert des Spieles*, d.h. seine Gewinnerwartung bei optimaler Strategie berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{EV}(Y) &= p(\text{Y foldet})(-\frac{1}{2}) + p(\text{Y All-in, X foldet})(+1) \\
&\quad + p(\text{Y All-in, X callt und X>Y})(-\frac{S}{3}) \\
&\quad + p(\text{Y All-in, X callt und X<Y})(0) \\
&= (1-y)(-\frac{1}{2}) + (y)(1-x)(+1) + (y-x)(x)(-\frac{S}{3}) + 0 \\
&= \ldots \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{27S}{4(S+3)^2}
\end{aligned}$$

Für Stacks von 10 Einheiten beträgt der durchschnittliche Gewinn von Y $\approx -0,1$, das Spiel begünstigt also (für diese Stackgröße) den Verteidiger. Dies ist aber nur der Wert des Spieles für $S > 3$. Gilt $S < \frac{3}{2}$ spielen beide Spieler alle Hände und der Wert des Spieles ist Null. Für $\frac{3}{2} < S < 3$ ergibt $x = 1$ und $y = \frac{2S+3}{4S}$. Daraus folgt: $\mathrm{EV}(Y) = p(\text{Y foldet})(-\frac{1}{2}) + p(\text{Y all-in})p(\text{x>y})(\frac{S}{3}) = (1-y)(-\frac{1}{2}) + (y)(1-y)(\frac{S}{3})$ $= \ldots = \frac{(2S-3)^2}{48S}$

3.2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

In Abbildung 1 sind die Ergebnisse des vereinfachten Pokerspiel graphisch dargestellt. Man erkennt, dass der Angreifer (Jam-Grenzwert) bis $S = 1,5$ und der Verteidiger (Call-Grenzwert) bis $S = 3$ alle Hände spielen. Danach werden die *Ranges* (Mengen von Händen) immer kleiner, da es sich immer weniger lohnt um die Blinds von 1,5 Einheiten zu spielen. Dabei spielt der Angreifer ab einer Stackgröße von drei Einheiten mehr Hände als der Verteidiger. Die Kurve „Y Equity" stellt den Wert des Spieles des Angreifers dar. Dieser hat bis zu einer Stackgröße von 6 Einheiten einen Vorteil. Für immer größere Stacks konvergiert diese Kurve gegen $-0,5$. Dieser Wert ergibt sich, da der Angreifer mit immer mehr Händen aussteigen muss und somit sehr oft den Small Blind von 0.5 Einheiten aufgibt. Insgesamt bleibt festzuhalten, dass die Ranges überraschend groß bzw. loose sind. Es wurde z.B. gezeigt, dass man bei einer Stackgröße von 10 Big Blinds mehr als die Hälfte der Hände all-in gehen sollte. Dies widerspricht jedoch der Intuition der meisten Menschen. Meist werden viel weniger Karten gespielt, da das Verhältnis von Nutzen und Risiko nicht korrekt abgeschätzt wird (vgl. [Che06], S. 129ff).

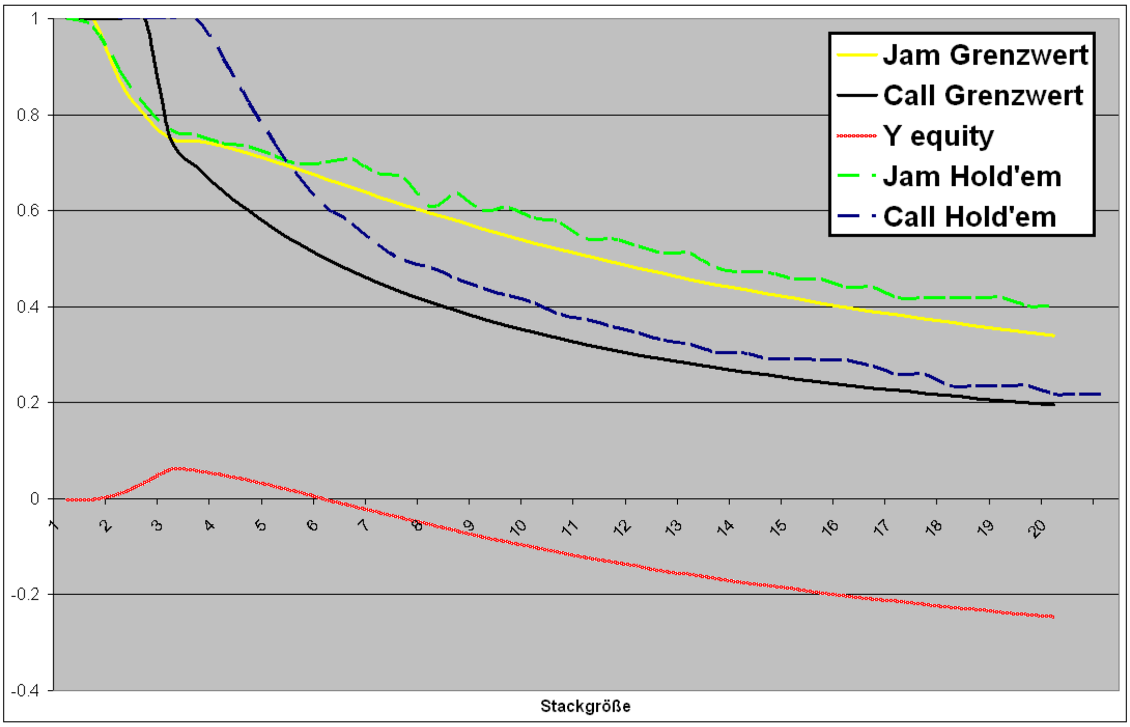

Abbildung 1: Jam und Call Grenzwerte des [0,1]-Modells sowie die Nash-Ranges für No Limit Hold'em basierend auf Daten des Nash-Calculators von Helmuth Melcher (siehe [Me07a]).

4 Der Realitätsbezug: Modell versus Poker

In diesem Kapitel werden die vorangehenden Ergebnisse bewertet und dem realen Poker gegenübergestellt. Weiter wird darauf eingegangen wie uns die Erkenntnisse im realen Pokerspiel von praktischem Nutzen sein können.

4.1 Unterschiede zwischen Modell und Poker

Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell enthält zwei wesentliche Einschränkungen im Vergleich zum realen Poker. Zum einen ersetzen Zahlen der [0,1]-Distribution die Pokerhände und zum anderen sind die beiden Spieler durch „Jam-or-Fold" in ihren Aktionen stark eingeschränkt.

Die [0,1]-Distribution kann nur in sehr begrenztem Maße die Pokerhände ersetzen. Dies hat mehrere Gründe. Zunächst gibt es in Hold'em fast keine Starthände mit einer Equity von weniger als 33% oder mehr als 66% gegenüber einer zufälligen

Hand. Viel öfter ist der Vorteil der besseren Hand deutlich geringer als zwei zu eins, wie durch unser Modell angenommen. Deshalb ist Hold'em sogar etwas aggressiver. Weiter sind die Handwerte in Hold'em auch nicht transitiv. Beispielsweise ist 2♠2♣ besser als A♠K♢ und J♡T♡ besser als 2♠2♣. Allerdings ist J♡T♡ nicht besser als A♠K♢ (Berechnungen durch PokerStove).

In Abbildung 1 sind die nach Nash optimalen Hold'em Ranges enthalten. Diese wurden mit Hilfe des Nash-Calculators von Helmuth Melcher berechnet (siehe [Me07a]). Auch wenn das verwendete Modell offensichtlich keine perfekte Abbildung darstellt sind die Unterschiede verhältnismäßig gering. Im Durchschnitt weichen die Werte um 3.8 Prozentpunkte bei den Jam-Ranges und 3.2 Ranges bei den Call-Ranges ab. Allgemein sind die Nash-Ranges größer als die von uns berechneten Ranges, da die meisten Hände entweder zu weniger als 66% Favorit sind bzw. als Außenseiter öfter als 33% gewinnen.

4.2 Relevanz in der Praxis

Die in dieser Arbeit aufgezeigten Ergebnisse wären nahezu wertlos, wenn sich die „Jam-or-Fold" Einschränkung als zu restriktiv herausstellen sollte. Dem ist nicht so. In No-Limit Pokerturnieren „schrumpfen" die Stacks der einzelnen Spieler durch die regelmäßigen Blinderhöhungen. Dabei kommt es fast zwingend zu Phasen in der die meisten Spieler einen Stack von weniger als 10 Big Blinds (BB) haben. Dies ist inbesondere in Sit'n'Gos der Fall, welche meist eine sehr schnelle *Blindstruktur* besitzen. Chen und Ankenman zeigen, dass bei Stackgrößen von bis zu 11BB das Jam-or-Fold Spiel nahezu optimal ist. Dazu untersuchen sie, ab welcher Stackgröße diese Einschränkung einen signifikanten Verlust gegenüber der optimalen Strategie darstellen würde (vgl. [Che06], S.137-139).
Zusätzlich zeigt Moshman eine weitere Sichtweise auf, das Jam-or-Fold Spiel in Turnieren zu begründen. Angenommen ein Spieler A hat einen Stack von 10BB. Anstatt direkt all-in zu gehen entscheidet er sich dazu nur auf einen Standardwert von 3BB zu erhöhen. Nun geht ein weiterer Spieler B diese Erhöhung mit. Am Flop[5] muss der Spieler A (fast) immer eine sogenannte *Continuation Bet* setzen, da er den Pot dadurch statistisch gesehen oft genug direkt gewinnt (unabhängig davon ob er selbst getroffen hat). Dieser Einsatz sollte mindestens die halbe Potgröße (hier also 3BB) betragen. Zu diesem Zeitpunkt ist der Pot dann 9BB (3+3+3) groß und der Stack des Spielers A ist auf 4BB geschrumpft (10-6). Sollte der andere Spieler B jetzt all-in gehen bekommt Spieler A sehr gute Odds, nämlich 9 (Pot) + 3 (Continuation Bet)+ 4 (All-in des Gegners) = 16 zu 4, also 4 zu 1. Diese Odds sind so gut, dass der Spie-

[5] In Pokervarianten mit Gemeinschaftskarten werden die ersten drei geteilten Gemeinschaftskarten als Flop bezeichnet.

ler A nicht mehr passen kann. Selbst wenn er zurückliegen sollte wird er sich noch oft genug verbessern, um ein mögliches All-in gewinnbringend mitzugehen. Er muss mitgehen, dies nennt man *Pot committed* (vgl. [Mos07], S. 18ff, 130ff). Letztendlich bedeutet seine Erhöhung vor dem Flop also auch sein All-in. Allerdings gibt er seinen Gegnern dadurch eine weitere strategische Option, nämlich seine Erhöhung nur mitzugehen. Nach Chen und Ankenman haben strategische Optionen einen nicht-negativen Wert. Diese Möglichkeit sollte der Spieler sein Gegnern verwehren und sich deshalb auf Jam oder Fold beschränken (vgl. [Che06], S. 138).

Die optimalen Hold'em Ranges zu berechnen ist ein äußerst aufwendiger Prozess, welcher nur durch moderne Rechner gelöst werden kann (vgl. [Che06], S. 130, 135 und [Me07a]). Die Idee zur Berechnung dieser Ranges soll hier jedoch kurz vorgestellt werden. Dazu bedient man sich einer Methode namens *Fictitious play*, die auf G.W. Brown zurückgeht (vgl. [Bro51]). Fictitious play umfasst Lernregeln, welche zu optimalen Strategien führen, wenn man sie in einen iterativen (schrittweisen) Prozess einbindet. Dudziak beschreibt die Regeln wie folgt: Jeder Spieler leitet aus der Strategie seiner Gegenspieler eine beste Antwort ab, welche seine alte Strategie ersetzt oder in diese integriert wird. Dieser Schritt wird von allen Spielern durchgeführt. Der gesamte Prozess wird wiederholt, bis ein Gleichgewicht erreicht wird (vgl. [Dud06], S. 375f). Es ist bewiesen, dass dieser Prozess gegen das Nash-Gleichgewicht konvergiert (vgl. [Hol05], S. 62 oder [Che06], S. 131).
Diese Methode kann man nun auf No Limit Hold'em Heads-Up Poker übertragen. Die Strategien jedes Spielers besteht aus 169 Werten zwischen 0 und 1, die jeweils festlegen, wie oft eine bestimmte Starthand gespielt wird. In jeder Iteration wird dann für jede einzelne Hand geprüft, ob sie einen positiven Erwartungswert besitzt. Dazu stellt man sie der Strategie des Gegners gegenüber (genauer Rechenweg siehe [Che06], S. 130-136). Ist der Erwartungswert positiv, lohnt es sich die Hand zu spielen. In diesem Fall wird die Wahrscheinlichkeit diese Hand zu spielen angehoben, ansonsten verringert. Dieser Prozess wird für beide Spieler solange wiederholt, bis keiner von beiden einen Vorteil erlangen kann, indem er von seiner Strategie abweicht. Stoppt der Prozess liegt das gesuchte Nash-Gleichgewicht vor. In der Praxis wiederholt man diesen Prozess nur bis zu dem Punkt, an dem sich die Erwartungswerte der beiden Strategien nur noch unwesentlich unterscheiden. Eine höhere Genauigkeit ist im Allgemeinen nicht nötig (vgl. [Me07a]).

Wendet man den beschriebenen, auf Fictitious play basierenden, Algorithmus für Stackgrößen bis zu 20BB[6] an, erhalten wir die jeweils optimalen Nashranges

[6] In der Praxis sind größere Stacks nicht von Bedeutung, da sich Push-or-Fold ab 12BB immer mehr von der optimalen Strategie unterscheidet (vgl. [Che06], S.139)

für Jam und Call. In Abbildung 2 sind diese übersichtlich zusammengefasst. Die Einträge entsprechen jeweils der maximalen Stackgröße (in BB) mit der man die jeweilige Hand jammen (auch pushen genannt) oder callen sollte. Die rechte obere Hälfte der Tabelle enthält die *suited* Hände (beide Spielkarten haben gleiche Farbe), die linke untere Hälfte die *offsuited* Hände.

Pusher

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+
K	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	19.9	19.3
Q	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	16.3	13.5	12.7
J	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	18.6	14.7	13.5	10.6	8.5
T	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	11.9	10.5	7.7	6.5
9	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	14.4	6.9	4.9	3.7
8	20+	18.0	13.0	13.3	17.5	20+	20+	20+	20+	18.8	10.1	2.7	2.5
7	20+	16.1	10.3	8.5	9.0	10.8	14.7	20+	20+	20+	13.9	2.5	2.1
6	20+	15.1	9.6	6.5	5.7	5.2	7.0	10.7	20+	20+	16.3	*	2.0
5	20+	14.2	8.9	6.0	4.1	3.5	3.0	2.6	2.4	20+	20+	**	2.0
4	20+	13.1	7.9	5.4	3.8	2.7	2.3	2.1	2.0	2.1	20+	***	1.8
3	20+	12.2	7.5	5.0	3.4	2.5	1.9	1.8	1.7	1.8	1.6	20+	1.7
2	20+	11.6	7.0	4.6	2.9	2.2	1.8	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	20+

Suited
Offsuit
Pockets

* 63s: 7.1-5.1, 2.3
** 53s: 12.9-3.8, 2.4
*** 43s: 10.0-4.9, 2.2

Caller

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+
K	20+	20+	20+	20+	20+	20+	17.6	15.2	14.3	13.2	12.1	11.4	10.7
Q	20+	20+	20+	20+	20+	16.1	13.0	10.5	9.9	8.9	8.4	7.8	7.2
J	20+	20+	19.5	20+	18.0	13.4	10.6	8.8	7.0	6.9	6.1	5.8	5.6
T	20+	20+	15.3	12.7	20+	11.5	9.3	7.4	6.3	5.2	5.2	4.8	4.5
9	20+	17.1	11.7	9.5	8.4	20+	8.2	7.0	5.8	5.0	4.3	4.1	3.9
8	20+	13.8	9.7	7.6	6.6	6.0	20+	6.5	5.6	4.8	4.1	3.6	3.5
7	20+	12.4	8.0	6.4	5.5	5.0	4.7	20+	5.4	4.8	4.1	3.6	3.3
6	20+	11.0	7.3	5.4	4.6	4.2	4.1	4.0	20+	4.9	4.3	3.8	3.3
5	20+	10.2	6.8	5.1	4.0	3.7	3.6	3.6	3.7	20+	4.6	4.0	3.6
4	18.3	9.1	6.2	4.7	3.8	3.3	3.2	3.2	3.3	3.5	20+	3.8	3.4
3	16.6	8.7	5.9	4.5	3.6	3.1	2.9	2.9	2.9	3.1	3.0	20+	3.3
2	15.8	8.1	5.6	4.2	3.5	3.0	2.8	2.6	2.7	2.8	2.7	2.6	15.0

Abbildung 2: Nash-Ranges für Heads-Up No Limit Hold'em von Helmuth Melcher (siehe [Me07b]).

5 Schlussbemerkung

Ziel dieser Arbeit ist es, aufzuzeigen, wie spieltheoretische Erkenntnisse in der Realität auf Poker anwendbar sind. Dazu betrachten wir nach einer kurzen Einführung in die Spieltheorie ein vereinfachtes Pokermodell, für welches wir die optimalen Strategien berechnen. Danach stellen wir das Modell dem realen Poker gegenüber und kommen zu dem Schluss, dass sich das Modell unter bestimmten Voraussetzungen sehr gut dazu eignet konkrete Eigenschaften des realen Pokerspiels zu untersuchen. Die spieltheoretischen Betrachtungen des Pokerspiels können also auch in der Reali-

tät von Nutzen sein. Gegenwärtig ist Poker von hohem Interesse, so spielen z.B. über vier Millionen Deutsche regelmäßig Poker. Poker spielen bedeutet zwar Spaß, jedoch ist es umso schöner, wenn man auch gewinnt. In dieser Arbeit wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie sich die Spieler in bestimmten Situationen schützen können. Verwendet ein Spieler eine optimale Strategie, stellt er damit langfristig ein Minimum an Gewinn sicher, welches sich bei Fehlern des jeweiligen Gegners noch weiter erhöht.
Durch das hohe gesellschaftliche Interesse an Poker ist mit weiteren wissenschaftlichen Ergebnissen zu rechnen. Die Zukunft wird zeigen, inwiefern forschungsbasierte Pokerstrategien sich in der Praxis bewähren werden.

6 Literaturverzeichnis

[Ano08] Anonymus (2008). Wikipedia - Poker. http://de.wikipedia.org/wiki/Poker. Letzter Zugriff: 14. September 2008, 11:05 MEZ

[Bew07] Bewersdorff, Jörg (2007). Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel: Methoden, Ergebnisse und Grenzen. 4. Auflage. Wiesbaden: Vieweg, S. I-IX, 98, 114, 241-258, 306-314.

[Bro51] Brown, George W. (1951). Iterative Solutions of Games by Fictitious Play. In: Activity Analysis of Production and Allocation, T.C. Koopmans (Ed.). New York: Wiley

[Che06] Chen, Bill / Ankenman, Jerrod (2006). The Mathematics of Poker. Pittsburg: ConJelCo, S. 101-139.

[Dud06] Dudziak, William (2006). Using Fictitious Play to Find Pseudo-Optimal Solutions for Full-Scale Poker. In: Proceedings of the 2006 International Conference on Artificial Intelligence, ICAI 2006, Las Vegas, Nevada, USA, Volume 2. CSREA Press/CSREA Press, S. 374-380.

[Fer05] Ferguson, Thomas S. (2005). Game Theory - Part II: Two-person Zero-Sum Games. Lecture Notes. http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/mat.pdf, S. 17-19. Letzter Zugriff: 12. September 2008

[Hol05] Holler, Manfred J. / Illing Gerhard (2005). Einführung in die Spieltheorie. 6. Auflage. Berlin: Springer, S. 1-77.

[Me07a] Melcher, Helmuth (2007). ICM Nash Calculator. http://www.holdemresources.net/hr/sngs/icmcalculator.html. Letzter Zugriff: 14. September 2008, 23:05 MEZ

[Me07b] Melcher, Helmuth (2007). HeadsUp Push/Fold Nash Equilibrium. http://www.holdemresources.net/hr/sngs/hune.html. Letzter Zugriff: 15. September 2008, 13:35 MEZ

[Mos07] Moshman, Collin (2007). Sit'n Go Strategy. Expert advice for beating one-table poker tournaments. Henderson: Two Plus Two Pub, S. 18-60, 129-146.

[Nas51] Nash, John (1951). Non-cooperative games. In: Annals of Mathematics. Volume 54. Princeton: Princeton University, S. 286-295

[Sch04] Schlee, Walter (2004). Einführung in die Spieltheorie. Mit Beispielen und Aufgaben. Wiesbaden: Vieweg, S. 1-36.

[vNe44] von Neumann, John / Morgenstern, Oskar (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press